Aula 14

Teorema de Hille-Yosida

Do Teorema 2 da aula 13 segue que para C_0-semigrupo $T(t)$ em E temos a estimativa: $\|T(t)\| \leq M e^{\omega t}$, $t \geq 0$. Se $\omega = 0 \Rightarrow$ diremos que $T(t)$ é uniformemente limitado e se além disso $M = 1 \Rightarrow T(t)$ é dito C_0-semigrupo das contrações.

Teorema 1 (Hille-Yosida) Um op-r linear A é gerador infinitesimal do C_0-semigrupo das contrações $T(t)$, $t \geq 0$, sse 1) A é fechado e $\overline{D(A)} = E$

2) $(0, \infty) \subset \rho(A)$ e $\forall \lambda > 0$: $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda}$

Demonstração ($\Rightarrow$) Suponha que A é inf. gerador do C_0-semigr. das contrações. $\Rightarrow A$ é fechado e $\overline{D(A)} = E$. Agora para $\lambda > 0$ e $x \in E$ definimos

$$R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x \, dt \quad (1)$$

Mostremos que (1) define $R_\lambda(A)$. Como $\int_0^\infty \|e^{-\lambda t} T(t) x\| dt \leq \frac{1}{\lambda}\|x\| \Rightarrow$ integral em (1) converge e define operador limitado e $\|R(\lambda)x\| \leq \frac{1}{\lambda}\|x\|$.

Para $h > 0$: $\frac{T(h) - I}{h} R(\lambda)x = \frac{1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t}(T(t+h)x - T(t)x)dt =$

$$= \frac{e^{\lambda h} - 1}{h}\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t) x \, dt - \frac{e^{\lambda h}}{h}\int_0^h e^{-\lambda t} T(t) x \, dt$$

(para mostrar isso faço troca $s = t + h$ em $\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t+h) x \, dt$)

Quando $h \downarrow 0$, obtemos $A R(\lambda) x = \lambda R(\lambda) x - x$ $\forall x \in E$ e $\lambda > 0$. Daí temos $(\lambda - A) R(\lambda) = I$ (2)

Do outro lado, para $x \in D(A)$ temos:

$$R(\lambda)Ax = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)Ax\,dt = \int_0^\infty e^{-\lambda t} A\,T(t)x\,dt \overset{(*)}{=}$$

$$= A\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt\right) = A\,R(\lambda)\,x \qquad (3)$$

Passo $(*)$ segue do fato que A é fechado:

$$\begin{cases} z_n = \int_0^n e^{-\lambda t} T(t)x\,dt \to \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt := z \\ A z_n = \int_0^n e^{-\lambda t} T(t)x\,dt = \int_0^n e^{-\lambda t} A\,T(t)x\,dt \to \int_0^\infty e^{-\lambda t} A\,T(t)x\,dt := y \end{cases}$$

Como A é fechado, $y = Az$ ou seja

$$\int_0^\infty e^{-\lambda t} A\,T(t)x\,dt = A\int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)x\,dt.$$

Finalmente de $(2)+(3)$ segue $R(\lambda)(\lambda - A)x = x$, $x \in D(A)$

e portanto $R(\lambda)$ é inverso para $(\lambda - A) \Rightarrow 2)$.

Para provar que 1) e 2) são suficientes, usaremos vários lemas:

Lema 1 Suponha que A satisfaz as condições 1) e 2)

$\Rightarrow \lim_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda(A)x = x$, $\forall x \in E$.

Demonstração Seja $x \in D(A) \Rightarrow$

$\|\lambda R_\lambda(A)x - x\| = \|A R_\lambda(A)x\| = \|R_\lambda(A)Ax\| \le \frac{1}{\lambda}\|Ax\| \underset{\lambda\to\infty}{\to} 0$

Já que $\overline{D(A)} = E$ e $\lambda R_\lambda(A) \in B(E)$ $(\|\lambda R_\lambda(A)\| \le 1) \Rightarrow$

$\lambda R_\lambda(A)x \underset{\lambda\to\infty}{\to} x$, $\forall x \in E$.

Def 1 Seja $\lambda > 0 \Rightarrow$ aproximação de Yosida de A está definida por $A_\lambda = \lambda A R_\lambda(A) = \lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda I$ (4)

Do Lema 1 segue que para A satisfazendo 1) e 2) do Teorema 1 temos $\lim_{\lambda\to\infty} A_\lambda x = Ax$, $x \in D(A)$.

Lema 2 Suponha que A satisfaz as condições 1) e 2) do Teorema 1 e A_λ é aprox. de Yosida $\Rightarrow$ A_λ é gerador infinitesimal do grupo unif-te contínuo das contrações e^{tA_λ}. Além disso, $\forall x \in E$, $\lambda, \mu > 0$:

$$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|.$$

Demonstração Da (4) segue que $\|A_\lambda\| \leq \lambda^2 \|R_\lambda(A)\| + \lambda$ $\Rightarrow A_\lambda \in B(E)$ $\Rightarrow$ por Teorema 1 da aula 13 temos que A_λ é gerador do semigrupo unif-te contínuo.

~~Do~~ Além disso, $\|e^{tA_\lambda}\| = e^{-t\lambda}\|e^{t\lambda^2 R_\lambda(A)}\| \leq e^{-t\lambda} e^{t\lambda^2\|R_\lambda(A)\|} \leq$

$\leq e^{-tA} \cdot e^{t\cdot\lambda} \leq 1$ (usei: $e^{A_\lambda t} = e^{(\lambda^2 R_\lambda(A) - \lambda)t} = \int_\Gamma e^{(\lambda^2\mu - \lambda)t}(\mu - R_\lambda(A))^{-1} d\mu =$

$= e^{-\lambda t} \int_\Gamma e^{\lambda^2 \mu t}(\mu - R_\lambda(A))^{-1} d\mu$, $\mathrm{Int}(\Gamma) \supset \sigma(R_\lambda(A))$)

$\Rightarrow e^{tA_\lambda}$ é semigrupo das contrações. Agora

$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| = \|\int_0^1 \frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} x)\, ds\| \leq$

$\underset{(*)}{\leq} \int_0^1 t\|e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}(A_\lambda x - A_\mu x)\|\, ds \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\|$

(no $(*)$ usei o fato que e^{tA_λ}, e^{tA_μ}, A_λ, A_μ comutam entre si e $\frac{d}{ds}(e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu}) = t(A_\lambda e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu} - A_\mu e^{tsA_\lambda} e^{t(1-s)A_\mu})$)

Demonstração da suficiência das cond-s 1) e 2) do Teorema 1. Seja $x \in D(A)$ $\Rightarrow$

$\|e^{tA_\lambda} x - e^{tA_\mu} x\| \leq t\|A_\lambda x - A_\mu x\| \leq t\|A_\lambda x - Ax\| +$

$+ t\|Ax - A_\mu x\| < \varepsilon$ (4a) $\forall t \geq 0$ (como $A_\lambda x \xrightarrow[\lambda\to\infty]{} Ax$) $\Rightarrow$

$\{e^{tA_\lambda} x\}$ é de Cauchy $\Rightarrow \exists \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda} x =: T(t)x$, $x \in D(A)$

Já que $\overline{D(A)} = E$ e $e^{tA_\lambda} \in B(E)$, obtemos existência do limite $\forall x \in E$. Assim temos família dos operadores $T(t)$ definida

por: $T(t)x := \lim\limits_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$, $\forall x \in E$. (5)

(4)

(5) $\Rightarrow$ $T(t+s) = T(t)\cdot T(s)$, $s,t \geq 0$ e $T(0) = I$ e $\|T(t)\| \leq 1$
(mostre!) $\|e^{tA_\lambda}\| \leq 1$

Observe que da (4a) segue que limite em (5) é uniforme em intervalos limitados de $[0,\infty)$.
$\Rightarrow$ $t \to T(t)x$ é contínua para $t \geq 0$ como limite uniforme das funções contínuas $t \to e^{tA_\lambda}x$.

(Seja $|t-t_n| < \delta \Rightarrow \|T(t_n)x - T(t)x\| \leq \underbrace{\|T(t_n)x - e^{t_nA_\lambda}x\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} +$
$+ \underbrace{\|T(t)x - e^{tA_\lambda}x\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \underbrace{\|(e^{t_nA_\lambda} - e^{tA_\lambda})x\|}_{<\frac{\varepsilon}{3}}$ para λ suficientemente grande)

Logo, $T(t)$ é C_0-semigrupo das contrações em E.
Agora basta provar que A é gerador de $T(t)$.
Temos $T(t)x - x = \lim\limits_{\lambda\to\infty}(e^{tA_\lambda}x - x) \underset{\substack{\text{Prop 1,3)}\\ \text{aula 13}}}{=} \lim\limits_{\lambda\to\infty} \int_0^t e^{sA_\lambda}A_\lambda x\, ds$

$\underset{(\ast)}{=} \int_0^t T(s)Ax\, ds$ (no $(\ast)$ usa-se convergência uniforme de $e^{tA_\lambda}A_\lambda x$ ao $T(t)Ax$ nos intervalos limitados) $\Rightarrow$

Seja B gerador infinit-l do $T(t)$ e $x \in D(A)$
$\lim\limits_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(T(t)x - x) = \lim\limits_{t\downarrow 0} \underbrace{\frac{1}{t}\int_0^t T(s)Ax\, ds}_{\to I} = Ax \Rightarrow x \in D(B)$ e

$Bx = Ax$, $x \in D(A)$ $\Rightarrow$ $B \supseteq A$
Do outro lado, como B é gerador de C_0-semigr. de contrações, pela necessidade, obtemos que $1 \in \rho(B)$.
Observe que assumimos que $1 \in \rho(A)$.
Portanto, $(I-B)D(A) = (I-A)D(A) = E$ $\Rightarrow$

$D(B) = (I-B)^{-1}E = D(A) \Rightarrow A = B$.

Corolário Seja A gerador inf-l do C_0-semigrupo das contrações $T(t) \Rightarrow$

1) Se A_λ é aproximação de Yosida de $A \Rightarrow$

$$T(t)x = \lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x \quad , x \in E.$$

2) $\rho(A) \supseteq \{\lambda : Re\lambda > 0\}$ e $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{Re\lambda}$

Demonstração 1) Do Teorema 1 segue que $\lim_{\lambda\to\infty} e^{tA_\lambda}x$ define C_0-semigrupo das contrações $S(t)$ e A é gerador de $S(t) \Rightarrow S(t) = T(t)$ pela unicidade do C_0-semigrupo corresp-te ao A.

2) Observe que o operador $R(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt$ está bem-definido para $\lambda \in \{\lambda : Re\lambda > 0\}$, (de fato $\|\int_0^\infty e^{-\lambda t}T(t)x\,dt\| \leq \int_0^\infty e^{-Re\lambda \cdot t}dt \cdot \|T(t)x\|$) e da primeira parte da prova do Teorema 1 segue que $R(\lambda) = (\lambda - A)^{-1} \Rightarrow \{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$.

Ex 1 Seja $E = C_{b,u}[0,\infty)$ ← limitadas, uniform-te contínuas

Seja $(T(t)f)(s) = f(t+s)$. É fácil ver que $\|T(t)\| \leq 1$ $\Rightarrow T(t)$ é C_0-semigrupo de contrações.

O gerador infinitesimal: $(Af)(s) = f'(s)$, $f \in D(A)$,

$D(A) = \{f \in E ;\ f' \in E\}$.

Observe que pelo Corolário em cima $\rho(A) \supseteq \{\lambda : Re\lambda > 0\}$

Seja $\lambda \in \{\lambda : Re\lambda \leq 0\} \Rightarrow$ a equação $(\lambda - A)f_\lambda = 0$ possui a solução $f_\lambda(s) = e^{\lambda s} \in D(A) \Rightarrow$

$$\sigma(A) = \sigma_p(A) = \{\lambda : Re\lambda \leq 0\}.$$

Ex2 Seja $E = C_0(-\infty, 0]$ e $(Af)(s) = -f'(s)$,
$\lim_{s\to-\infty} f(s) = 0$
$D(A) = C_0^1(-\infty, 0]$ $\Rightarrow$ A gera C_0-semigrupo das contrações dada por $(T(t)f)(s) = f(s-t)$, $t \geq 0$, $f \in C_0(-\infty, 0]$ e $\sigma(A) = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda \leq 0\}$.

Demonstração • Mostremos que $\overline{D(A)} = E$.
Sejam $\varepsilon > 0$, $f \in E$. Suponha que $\tilde{f}$ é extensão da f tal que $\tilde{f} \in C_0(\mathbb{R})$. É sabido que $\exists \tilde{h} \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ tal que $\|\tilde{f} - \tilde{h}\|_{C_0(\mathbb{R})} < \varepsilon$ $\Rightarrow$ $\|f - \tilde{h}\restriction(-\infty,0]\| \leq \varepsilon$.
Observando que $\tilde{h}\restriction(-\infty,0] \in D(A)$, obtemos $\overline{D(A)} = E$.

• Para provar que A é fechado, peguemos $x_n \in D(A)$ tal que
$$\begin{cases} x_n \to x \text{ em } E \\ -x_n' \to y \text{ em } E \end{cases}$$
Temos
$$\int_s^0 y(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_s^0 -x_n'(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} x_n(s) - x_n(0) = x(s) - x(0)$$
pela continuidade uniforme em $[s,0]$

$\Rightarrow -x'(s) = y(s)$ e $x \in D(A)$ (de fato, $\lim_{s\to-\infty} x'(s) = -\lim_{s\to-\infty} y(s) = 0$, mostre que $\lim_{s\to-\infty} x(s) = 0$ usando $x_n \to x$)

• Mostremos que $(0, \infty) \subset \rho(A)$
$\lambda - A$ é injetor: óbvio (mostre!)
$\lambda - A$ é sobrejetor: Seja $f \in E$. Mostremos que $\exists u \in D(A)$ tal que $(\lambda - A)u = f$ ou $u' = -\lambda u + f$ (6)
Observe que $u(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau)\,d\tau$ resolve (6).
De fato, é fácil conferir que $u(s)$ formalmente

satisfaz (6). Além disso, é óbvio que $u(t) \in C(-\infty,0]$. (7)

Vamos mostrar que $\lim_{s \to -\infty} u(s) = 0$. Seja $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow \exists\, s_\varepsilon < 0$ tal que $|f(\tau)| \leq \varepsilon$ para $\tau \leq s_\varepsilon$ $\Rightarrow$

$$|u(s)| \leq \int_{-\infty}^{s} e^{-\lambda(s-\tau)} |f(\tau)|\, d\tau \leq \varepsilon \underset{r = s-\tau}{\int_0^\infty} e^{-\lambda r} dr = \frac{\varepsilon}{\lambda}, \ s \leq s_\varepsilon$$

Já que $u'(s) = -\lambda u + f$, obtemos que $\lim_{s \to -\infty} u'(s) = 0$

$\Rightarrow u(s) \in D(A)$.

Finalmente $\lambda - A$ é sobrejetor. Como A é fechado, obtemos $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$.

- Mostremos estimativa do 2) do Teorema 1.

Temos $R_\lambda(A) f(s) = \int_{-\infty}^{s} e^{-\lambda(s-\tau)} f(\tau)\, d\tau$ $\Rightarrow$

$$\| R_\lambda(A) f \| \leq \sup_{s \in (-\infty,0]} \int_{-\infty}^{s} e^{-\lambda(s-\tau)} \|f\|\, d\tau = \|f\| \int_0^\infty e^{-\lambda r} dr = \frac{\|f\|}{\lambda}$$

Finalmente, pelo Teorema 1, A gera C_0-semigrupo das contrações.

- Para determinar $T(t)$, pegue $u_0 \in D(A)$ e define $u(t,s) = (T(t)u_0)(s)$, $t \geq 0$, $s \leq 0$. Pela Proposição 2 da aula 13, $u(t,s) \in C^1([0,\infty), E) \cap C([0,\infty), [D(A)])$ e resolve o problema

$$\begin{cases} \partial_t u(t,s) = \overset{Au(t,s)}{-\partial_s u(t,s)}, & t \geq 0,\ s \leq 0 \\ u(0,s) = u_0(s), & s \leq 0. \end{cases}$$

É fácil ver que $v(t,s) = u_0(s-t)$ é a solução do problema. Unicidade de solução implica que

$T(t)u_0 = u_0(\cdot - t)$, $t \geq 0$ para $u_0 \in D(A)$

Mas como $\overline{D(A)} = E$, a igualdade $T(t)x = x(\cdot - t)$ vale para todo $x \in E$.

• Seja $f_\lambda(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow A f_\lambda = \lambda f_\lambda$ e $f_\lambda \in D(A)$ para $\lambda \in \{\lambda : Re\lambda < 0\} \Rightarrow \{\lambda : Re\lambda < 0\} \subseteq \sigma_p(A) \subseteq \sigma(A)$

$\Rightarrow \{\lambda : Re\lambda \leq 0\} \subseteq \sigma(A) \Rightarrow \sigma(A) = \{\lambda : Re\lambda \leq 0\}$

Já que pelo Corolário na p.5 $\{\lambda : Re\lambda > 0\} \subseteq \rho(A)$.

Observação. Seja $T(t)$ um C_0-semigrupo satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$, para algum $\omega \geq 0$. Considere $S(t) = e^{-\omega t} T(t) \Rightarrow \|S(t)\| \leq 1$ e $S(t)$ é C_0-semigrupo de contrações. Se A é gerador inf-l de $T(t) \Rightarrow$ $A - \omega I$ é gerador inf-l de $S(t)$. De fato

$$\lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{S(t) - I}{t} \right) x = \lim_{t \downarrow 0} \left(\frac{e^{-\omega t} T(t) - I}{t} \right) x =$$

$$= \lim_{t \downarrow 0} e^{-\omega t} \frac{(T(t) - I + I - e^{\omega t} I)}{t} x = Ax - \omega x.$$

• Do outro lado se B for gerador inf-l do C_0-semigr. de contrações $S(t) \Rightarrow B + \omega I$ é gerador do C_0-semigr. satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ $(T(t) = e^{\omega t} S(t))$

Lema 3 A é um gerador inf-l do C_0-semigr. $T(t)$ satisfazendo $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ sse

1) A é fechado e $\overline{D(A)} = E$

2) $\rho(A) \supseteq \{\lambda \in \mathbb{R} : \lambda > \omega\}$ e para tal λ $\|R_\lambda(A)\| \leq \frac{1}{\lambda - \omega}$

Demonstração Segue do Teorema de Hille-Yosida e observação acima.